

Exemple/Exercice
14.4

Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ calculer la
décomposition spectrale.
→ Voir la solution dans les notes.

Dans cette séance on va voir

10.12

- (i) un résultat sur les matrices symétriques ← pour mieux comprendre le thm. spectral
- (ii) la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (SVD)

Orthogonalité des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes

Corollaire Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors, $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$ (i.e. $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$)

(Preuve) On a vu que
(Lemme 21, feuille 72).

$$\bar{w} \cdot (A\bar{v}) = (A^T \bar{w}) \cdot \bar{v}, \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$$

$$= (A\bar{w}) \cdot \bar{v}$$

↑ si A symétrique

$$\Rightarrow \underset{\substack{\bar{v}_2 \\ \text{v.p.}}}{v_1 \cdot (A\bar{v}_2)} = (A\bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2$$

|| ← || → $\bar{v}_1$ v.p.

$$\lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot \lambda_2 \bar{v}_2$$

↑ (PS.2)

$$\lambda_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 - \lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}_{\neq 0} = 0$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}_{=0}$$

$\Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$ □

Chapitre 15 ISVD

Objectif e.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{on veut}}$

- $U \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. $U^T U = I_m$)
- $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ diagonale et non négative (i.e. $\Sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\Sigma_{ij} \geq 0, \forall i, j$)
- $V \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale

telles que $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ (SVD)

[Rk] Si $m=4, n=2$ par exemple $\rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} * \geq 0 & 0 \\ 0 & * \geq 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

[Thm 15.5] La SVD existe toujours mais elle n'est pas forcément unique. $\rightarrow$ Mais $\{\Sigma_{i,i}\}$ est unique

[Terminologie]

- $U = [\underbrace{\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m}_{\text{vecteurs singuliers à gauche de } \Delta}]$
- $\Sigma_{i,i} \leftarrow$ valeurs singulières de Δ
- $V = [\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n}_{\text{vecteurs singuliers à droite de } \Delta}]$

① Calcul de Σ

① (i) Calculer les valeurs propres de $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$
 $\hookrightarrow$ on les écrit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ (Lemme 23)
 (on répète chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité algébrique)

① (ii) Garder les valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ de $A^T A$
 et on pose $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} > 0$ ($1 \leq i \leq l$)

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_l & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{m lignes} \\ \\ \end{matrix}$$

n colonnes

Proposition:
 $l = \text{rang}(A)$

Exemple/Exercice 15.9

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Calculer
 Σ dans la
 SVD

(i) On note que $A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 153 & 96 \\ 96 & 97 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(A^T A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \text{Tr}(A^T A) \lambda + \det(A^T A)$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{2} \lambda + \frac{9}{16} = \left(\lambda - \frac{9}{4}\right) \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{Tr}(B)} \lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{\det(B)}$$

(B - \lambda I_2)

(ii) $\lambda_1 = \frac{9}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) [Calcul de V]

On calcule une BON de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs propres de $A^T A$: $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

$$\Rightarrow V_0 = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

Exemple (suite) Calculer V .

$$\text{Pour } \left[\begin{array}{c|c} \lambda = \frac{9}{4} & \\ \hline 1 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \mathbb{E}_{9/4} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -72/100 & 96/100 \\ 96/100 & -128/100 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -18/25 & 24/25 \\ 24/25 & -32/25 \end{pmatrix} \\ = \text{Ker} \begin{pmatrix} -18/25 & 24/25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ voir les notes
manuscrites